Tentamen Lineaire Algebra, vrijdag 27 augustus 2004

Het tentamen bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Voor een gegeven geheel getal n is $P_n(\mathbb{R})$ de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle polynomen van graad hoogstens n, met reële coefficienten. Definieer de afbeelding $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ door

$$T(f(x)) := xf'(x)$$

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is

b. Bepaal de nulruimte $N(T)$ van T. Wat is de dimensie van $N(T)$?

c. Bepaal de beeldruimte $R(T)$ van T. Wat is de rang van T?

d. Is T 1-1 (Engels: one-to-one)? Beargumenteer uw antwoord.

e. Is T op (Engels: onto)? Beargumenteer uw antwoord.

f. Bepaal de matrix $[T]_\beta$ van T ten opzichte van de basis $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$.

2. Laat de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de spiegeling zijn in de lijn $y = 3x$.

a. Bepaal de matrix van T ten opzichte van de basis

$$\beta' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

b. Bepaal de eigenwaarden van T met bijbehorende eigenvectoren.

c. Bepaal het karakteristieke polynoom van T.

d. Laat $\beta = \{e_1, e_2\}$ de standaard geordende basis zijn van $\mathbb{R}^2$. Bepaal de coordinatentransformatie-matrix $Q = [1_{\mathbb{R}^2}]_{\beta'}^{\beta}$.

e. Bepaal de matrix van T ten opzichte van de standaard geordende basis van $\mathbb{R}^2$.

3. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de rang van A.

b. Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(A)$ van A.

c. Bepaal een basis van de nulruimte $N(A)$.

d. Laat de vector b gegeven zijn door

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = b$.

4. Stel $\mathcal{V}$ een eindig-dimensionale vectorruimte over $\mathbb{C}$ en $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ een lineaire afbeelding.

a. Toon aan dat T inverteerbaar is dan en slechts dan als het getal 0 geen eigenwaarde is van T.

Neem in de rest van dit vraagstuk aan dat T inverteerbaar is.

b. Stel $\lambda \in \mathbb{C}$. Toon aan dat λ een eigenwaarde is van T dan en slechts dan als λ^{-1} een eigenwaarde is van T^{-1}.

c. Toon aan dat T diagonaliseerbaar is dan en slechts dan als T^{-1} diagonaliseerbaar is.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 24
Vraagstuk 2: 22
Vraagstuk 3: 22
Vraagstuk 4: 22